

Тема: Обчислення площ плоских фігур

Мета:

- *Навчальна:* розглянути можливі застосування інтеграла в інших науках; розглянути можливість знаходження об'єму тіла обертання за допомогою інтеграла; розглянути можливість знаходження роботи змінної сили за допомогою інтеграла; розглянути економічний зміст інтеграла;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння математичною мовою висловлювати власну думку; правильно користуватись термінологією пов'язаною з вивченою темою;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- *Математична компетентність:*
 - *Уміння:* оперувати числовою інформацією, розв'язувати задачі математичного змісту, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач
 - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві
 - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Сформулюйте означення криволінійної трапеції
(Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$, називається **криволінійною трапецією**)
- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
($S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$)



- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$
- Як обчислити визначений інтеграл?
 1. Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
 2. Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
 3. Знайти різницю $F(b) - F(a)$;Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

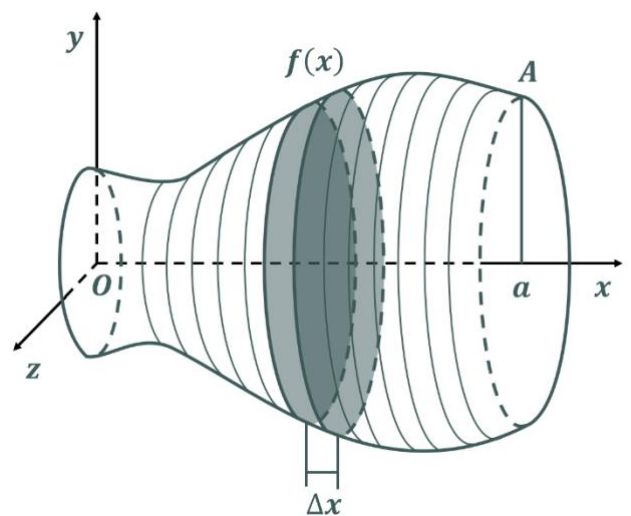
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Що ви знаєте про формулу Ньютона-Лейбніца?
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

III. Вивчення нового матеріалу

• Об'єм тіла обертання

- Будь-яке тіло обертання можна уявити як суму дуже великої кількості пластин або циліндрів з дуже малими висотами Δx .
- Радіус кожного такого циліндра буде залежати від змінної x та дорівнюватиме $f(x)$
- Як знайти об'єм циліндра?
($V = \pi R^2 h$)
- Так як об'єм циліндра $V = \pi R^2 h$, то об'єм циліндра, що відповідає змінній x , буде дорівнювати $\pi f^2(x) \Delta x$





- Що потрібно зробити, щоб знайти увесь об'єм тіла обертання?
(Об'єму усього тіла обертання буде відповідати інтегральна сума $\pi f^2(x_1)\Delta x + \pi f^2(x_2)\Delta x + \dots + \pi f^2(x_n)\Delta x$)

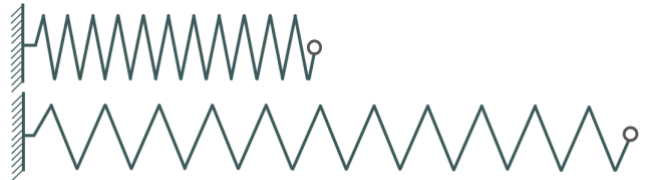
Отже, об'єм усього тіла обертання можна знайти за формулою:

$$V = \int_0^a \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^a f^2(x) dx$$

• Робота змінної сили

- За допомогою інтегралів можна обчислити роботу змінної сили.
(Наприклад, розтягування пружини – для того, щоб її розтягнути необхідно постійно застосовувати більшу силу)

- Для розтягування пружини потрібно постійно прикладати більшу й більшу силу. Згадавши уроки фізики, як можемо в такому випадку знайти роботу, необхідну для розтягування пружини на певну відстань?



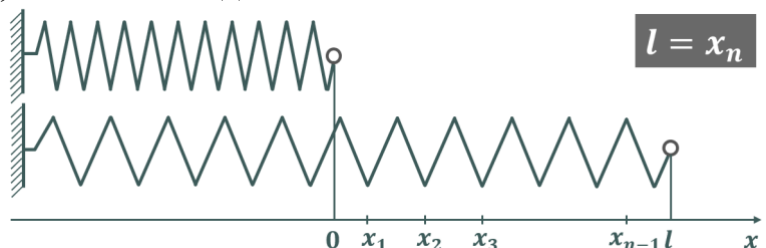
(Учні висловлюють власні ідеї)

- Як знайти роботу, якщо внаслідок дії сталої сили F тіло переміщується в напрямі сили на відстань s ?

($A = Fs$)

- Як бути в тому випадку, коли на тіло діє не постійна сила а змінна?

(Можемо поділити відрізок на який розтягується пружина на n рівних частин і знайти виконану роботу на кожній частині)



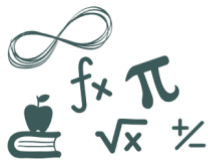
- Як можемо знайти силу, яку необхідно прикласти щоб розтягнути пружину на відстань x ?

(За допомогою закону Гука)

- Сформулюйте закон Гука

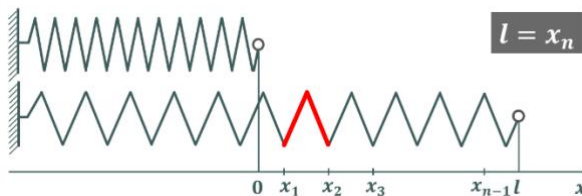
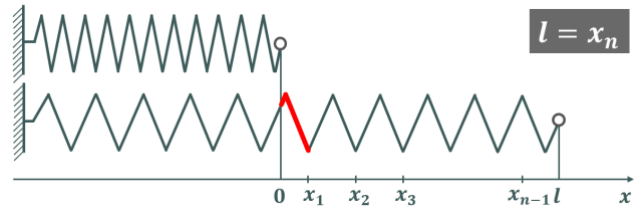
$$F = kx$$

F – сила, k – коефіцієнт жорсткості, x – видовження.



- Що ви знаєте про коефіцієнт жорсткості?
(Коефіцієнт жорсткості – це властивість стрижня або пружини, а не властивість матеріалу, з якого він виготовлений)
- Як можемо виразити силу $f(x)$, яку необхідно прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань x ?
Згідно із законом Гука, ця сила пропорційна цій відстані, тобто $f(x) = kx$

- Яку необхідно виконати роботу, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; x_1]$?
 $A_1 = f(x_1) \cdot \Delta x$



- Яку необхідно виконати роботу, щоб розтягнути пружину на відстань $[x_1; x_2]$?
 $A_2 = f(x_2) \cdot \Delta x$

- Отже, яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на відстань $[0; l]$?
 $A_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$

- Якщо ділити відрізок $[0; l]$ на більшу і більшу кількість частин, то значення роботи A_n буде все ближче наближатися до точного значення виконаної роботи A

$$\left. \begin{matrix} n \rightarrow \infty \\ A_n \rightarrow A \end{matrix} \right| \Rightarrow A = \int_0^l f(x) dx = \int_0^l kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2}kl^2$$

Інші застосування інтегралів у фізиці:

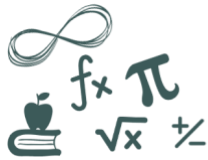
$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$$

Q – кількість теплоти
 c – теплоємність

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

s – переміщення
 v – швидкість
 a – прискорення



Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС



$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

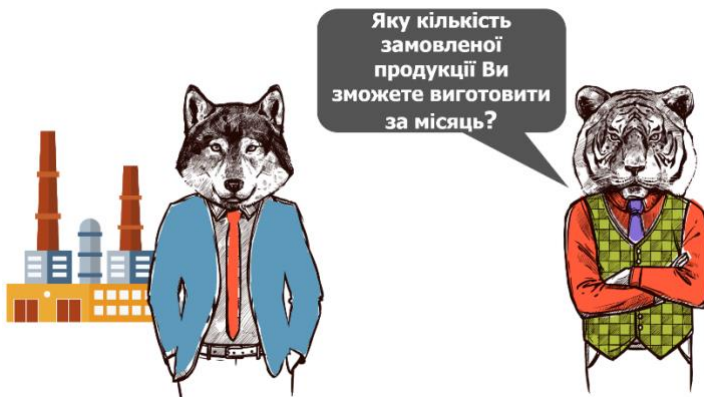
q – електричний заряд
 I – сила струму

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

m – маса тонкого стрижня
 ρ – лінійна густина

• Економічний зміст інтеграла

- Нехай у нас є власне виробництво і нам потрібно знайти обсяг виробленої продукції певний проміжок часу.



- Нехай зміна продуктивності підприємства протягом певної одиниці часу
 $y = f(x)$

Завдання:

Знайти обсяг продукції U , виробленої за проміжок часу $[0; T]$

- Відомо, що коли продуктивність не змінюється протягом певного часу ($f(t)$ - стала функція), то ΔU – обсяг продукції виробленої за деякий проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ можна знайти за формулою:

$$\Delta U = f(t)\Delta t$$

Загальний випадок:

$$\Delta U \approx f(t)\Delta t,$$

$$t \in [t; t + \Delta t]$$

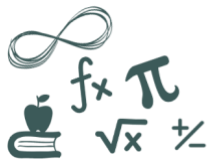
- Поділимо відрізок $[0; T]$ на n рівних частин точками $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ($t_0 = 0, t_n = T$)



$$\Delta U_k \approx f(t_k)\Delta t$$

ΔU_k - обсяг продукції виробленої за проміжок часу $\Delta t = [t_{k-1}, t_k]$, де $t_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$

- Як знайти загальний обсяг продукції?



$$U \approx \sum_{k=1}^n \Delta U_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t$$

- Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то кожна з використаних наближених рівностей буде точнішою, отже:

$$U = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t$$

- Отже, розв'язком нашого завдання (Знайти обсяг продукції U , виробленої за проміжок часу $[0; T]$) буде наступна формула:

$$U = \int_0^T f(t) dt$$

$f(t)$ - продуктивність праці в момент часу t , U - обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$

Інші застосування інтегралів в економіці:

$$\Pi = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt$$

Π - дисконтована вартість грошового потоку
 I - швидкість грошового потоку
 p - річна відсоткова ставка
 t - час

$$CS = \int_0^{q_0} p(q) dq - p_0 q_0 ;$$

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} p(q) dq$$

q - кількість товару
 p - ціна товару (вартість одиниці),
 $(p_0; q_0)$ - точка рівноваги попиту і пропозиції
 CS - надлишок для споживача

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

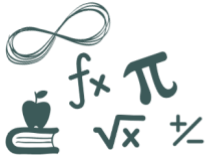
№1

Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі x фігури, обмеженої заданими лініями:

- 1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$
- 2) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$

Розв'язок:

- 1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 (2x+1)^2 dx = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{\pi \cdot (2x+1)^3}{6} \Big|_1^4 \\ &= \frac{\pi \cdot (2 \cdot 4 + 1)^3}{6} - \frac{\pi \cdot (2 \cdot 1 + 1)^3}{6} = \frac{729}{6} \pi - \frac{27}{6} \pi = \frac{702}{6} \pi \\ &= 117\pi \text{ (куб.од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 117π (куб.од.)

2) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$

Знайдемо межі інтегрування:

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 4 \frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \pi \cdot \left(\left(\frac{2^5}{5} - 2^4 + 4 \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right) = \pi \cdot \left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} \right) \\ &= \pi \cdot \left(6 \frac{2}{5} + 10 \frac{2}{3} - 16 \right) = \pi \cdot \left(16 \frac{16}{15} - 16 \right) \\ &= \pi \cdot \left(17 \frac{1}{15} - 16 \right) = \pi \cdot 1 \frac{1}{15} = \frac{16\pi}{15} \text{ (куб. од)} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{16\pi}{15}$ (куб. од)

№2

Тіло рухається зі швидкістю $v(x)$. Знайдіть шлях (у м), пройдений тілом за проміжок часу (у с) від t_1 до t_2

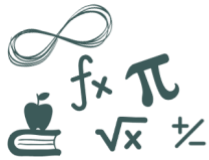
1) $v(t) = 3t + 2t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 6$

2) $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$

Розв'язок:

1) $v(t) = 3t + 2t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 6$

Так як $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$:



$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^6 (3t + 2t^2) dt = \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^6 = \left(\frac{3 \cdot 6^2}{2} + \frac{2 \cdot 6^3}{3} \right) - 0 \\ &= \frac{3 \cdot 36}{2} + \frac{2 \cdot 216}{3} = \frac{108}{2} + \frac{432}{3} = 54 + 144 = 198 \text{ м} \end{aligned}$$

Відповідь: 198 м

2) $v(t) = 3t^2 - 2t + 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$

Так як $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^2 (3t^2 - 2t + 3) dt = \left(\frac{3t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} + 3t \right) \Big|_0^2 = (t^3 - t^2 + 3t) \Big|_0^2 \\ &= (2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2) - 0 = 8 - 4 + 6 = 10 \text{ (м)} \end{aligned}$$

Відповідь: 10 (м)

№3

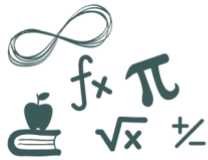
Продуктивність праці робітника протягом дня визначається функцією $z(t) = -0,00645t^2 + 0,05t + 0,5$ (грош. од./год), де t – час у годинах від початку роботи, $0 \leq t \leq 8$. Знайдіть обсяг продукції (у грошових одиницях), виготовленої за робочий день.

Розв'язок:

Так як $U = \int_0^T f(t) dt$:

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^8 (-0,00645t^2 + 0,05t + 0,5) dt \\ &= \left(\frac{-0,00645 \cdot t^3}{3} + \frac{0,05 \cdot t^2}{2} + 0,5t \right) \Big|_0^8 \\ &= \frac{-0,00645 \cdot 8^3}{3} + \frac{0,05 \cdot 8^2}{2} + 0,5 \cdot 8 = -1,1008 + 1,6 + 4 \\ &= 4,4992 \text{ (грош. од./год)} \end{aligned}$$

Відповідь: 4,4992 (грош. од./год)



Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?

Розв'язок:

**Не забуваємо переводити дані умови згідно метричної системи одиниць*

Знайдемо коефіцієнт жорсткості. Згідно закону Гука:

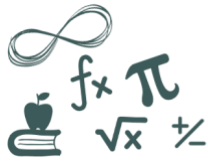
$$F = kx$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1}{0,01} = 100$$

$$\text{Так як } A = \int_0^l f(x)dx = \int_0^l kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}k \cdot 0^2 = \frac{1}{2}kl^2:$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,05^2 = 50 \cdot 0,0025 = 0,125 \text{ (Дж)}$$

Відповідь: 0,125 (Дж)



№5

Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Який шлях проїде пілот цієї гонки з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху?

Розв'язок:

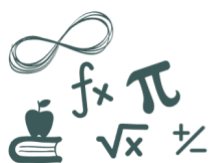
$$\begin{aligned}\text{Так як } s &= \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt : \\ S(t) &= \int_2^7 (2(t + 2)^{2,5}) dt = 2 \cdot \frac{(t + 2)^{3,5}}{3,5} \Big|_2^7 \\ &= \frac{4(t + 2)^{3,5}}{7} \Big|_2^7 \left(\begin{array}{l} \text{Помножили чисельник} \\ \text{та знаменник на 2} \end{array} \right) \\ &= \frac{4(t + 2)^3 \cdot \sqrt{t + 2}}{7} \Big|_2^7 \left(\begin{array}{l} \text{Так як} \\ a^x a^y = a^{x+y} \end{array} \right) \\ &= \frac{4(7 + 2)^3 \cdot \sqrt{7 + 2}}{7} - \frac{4(2 + 2)^3 \cdot \sqrt{2 + 2}}{7} \\ &= \frac{2916 \cdot \sqrt{9}}{7} - \frac{256 \cdot \sqrt{4}}{7} = \frac{8748}{7} - \frac{512}{7} = \frac{8236}{7} \approx 1176 \text{ (м)}\end{aligned}$$

№6

Знайдіть шлях, який пройде тіло від початку руху до зупинки, якщо його швидкість $v(t) = 18t - 6t^2$

Розв'язок:

$$\begin{aligned}\text{Так як } s &= \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt : \\ S(t) &= \int_0^t (18t - 6t^2) dt = \frac{18t^2}{2} - \frac{6t^3}{3} \Big|_0^t = (9t^2 - 2t^3) \Big|_0^t = 9t^2 - 2t^3\end{aligned}$$



Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = 4 + 2t$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди?

Розв'язок:

$$\begin{aligned}\text{Так як } q &= \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt : \\ q(t) &= \int_2^6 (4 + 2t) dt = \left(4t + \frac{2t^2}{2} \right) \Big|_2^6 = (4t + t^2) \Big|_2^6 \\ &= (4 \cdot 6 + 6^2) - (4 \cdot 2 + 2^2) = 60 - 12 = 48 \text{ (Кл)}\end{aligned}$$

Відповідь: 48 (Кл)

V. Підсумок уроку

- Про які нові застосування інтегралів ви знаєте?
- Як можна за допомогою інтеграла обчислити об'єм тіла обертання?
- Як за допомогою інтеграла визначити роботу, що необхідна для розтягу або стиснення пружини?
- Знайти обсяг продукції U , виробленої за проміжок часу $[0; T]$

VI. Домашнє завдання

Опрацювати конспект Опрацювати ст.69	Мерзляк А.Г.
Опрацювати конспект Виконати № 11.19; 11.20	Істер О.С.
Опрацювати конспект Виконати № 7.9; 7.10	Нелін Є.П.
Опрацювати конспект, §8 Виконати № 308, 312, 319, 323	Бевз Г.П.